МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ГБПОУ МО «ЛУХОВИЦКИЙ АГРАРНО-ПРОМЫШЛЕННЫЙ ТЕХНИКУМ»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПО ПО ТЕМЕ: «ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ»

Разработала- преподаватель математики
высшей категории
Каунова Вера Федоровна

Данная методическая разработка посвящена актуальной теме организации самостоятельной работы студентов СПО.

Методическое пособие разработано на основании требований среднего общего образования, предъявляемых к структуре, содержанию и результатам освоения учебной дисциплины «Математика».

Настоящее пособие предназначено для студентов всех специальностей и полностью соответствует программе по математике для студентов СПО. Оно может быть использовано студентами для самостоятельного изучения раздела программы, а также преподавателем на уроке при изучении нового материала, для домашнего задания, при повторении и подготовке к практической контрольной работе.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методическое пособие разработано с целью организации выполнения студентами требований самостоятельной работы.

Настоящее пособие предназначено для студентов всех специальностей и полностью соответствует программе по математике для СПО. Оно может быть использовано студентами для самостоятельного изучения раздела программы, а также преподавателем на занятии при изучении нового материала, для домашнего задания, при повторении и подготовке к практической и контрольной работе.

Пособие включает в себя, помимо задач, краткие теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач указанного раздела математического анализа, подробные решения типовых примеров и задач, вопросы для самопроверки, а также упражнения для самостоятельного решения по теме.

1. ПЕРВООБРАЗНАЯ

1. Под **дифференцированием** функции $f(x)$ мы понимаем нахождение производной $f'(x)$.
2. Операция интегрирования обратная операции дифференцирования.
3. Следовательно, **операция интегрирования** состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.

5. Функцию $F(x)$ называют **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.
6. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$

Например: $f(x)=3x^2$, тогда $F(x)=x^3$, т. к. $F'(x)=3x^2$.
Но дифференциалу функции соответствует не единственная первообразная, а множество, причем они отличаются друг от друга постоянным слагаемым. Действительно, функции $F(x) = x^3+5$, $F(x) = x^3-100$, …. , $F(x) = x^3 + C$,

являются первообразными для функции $f(x)=3x^2$, где C - любое действительное число

1.1 Правила нахождения первообразных

Правило 1. Если F есть первообразная для f , а G- первообразная для g , то F+G есть первообразная для f +g.

$$\int (f + g)\, dx = F + G + C$$

Правило 2. Если F есть первообразная для f , а k – постоянная, то функция kF-первообразная для kf.

$$\int kf dx = k\int f dx = kF + C$$

Правило 3. Если F(x) есть первообразная для f(x) , а k и b - постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ есть первообразная для f (kx+b) .

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$$

2. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Совокупность всех первообразных функций *F(x)+C* для дифференциала *f(x)dx* называется **неопределенным интегралом** и записывается $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где f(x) – подынтегральная функция;
f(x)dx – подынтегральное выражение;
F(x) – первообразная;
С- произвольная постоянная интегрирования.

Так, пользуясь определением неопределённого интеграла, можно записать

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

2.1 Основные свойства неопределенного интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла.

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной С

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла.

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где $a = const, a \neq 0$

4. Неопределённый интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций.

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

2.2 Таблица основных интегралов

1. $\int 0dx = C$
2. $\int dx = x + C$
3. $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1}\, dx = \ln|x| + C$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \ C$
6. $\int e^x\, dx = e^x + C$
7. $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
9. $\int \cos x dx = \sin x + C$
10. $\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\ x + C$
11. $\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\ x + C$
12. $\int \sin kx\, dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$
13. $\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k}$
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
16. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + C$
17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
18. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$
19. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}\ | + C$

2.3 Правила интегрирования

2.3.1 Метод непосредственного интегрирования

Способ непосредственного интегрирования применяется в том случае, когда для нахождения интеграла достаточно применить формулы интегрирования, свойства 3 и 4 неопределённого интеграла и простейшие алгебраические преобразования.

Примеры нахождения интегралов

1) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$;

2) $\int x^{\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} = \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$

3) $\int 2^x \, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C;$

4) $\int e^x \, dx = e^x + C$

5) $\int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

6) $\int \frac{1}{7-3x} dx = -\frac{1}{3} \ln|7-3x| + C;$

7) $\int \cos 2x = \frac{1}{2} \sin x + C$

8) $\int \frac{6dx}{\sin^2 x} = 6 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -6\int ctgx$+C;

9) $\int \frac{1}{2^2+x^2} dx = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ +C.

Вычислить неопределенные интегралы, используя свойства и формулы неопределенных интегралов:

1) $\int(x^2-\cos x)\,dx=\int x^2dx-\int\cos x dx=\frac{x^3}{3}-\sin x+C;$

2) $\int(5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)\,dx=\int 5x^4dx-\int 4x^3dx+\int 3x^2dx++\int dx=5\int x^4dx-4\int x^3dx+3\int x^2dx+\int dx=5\frac{x^5}{5}-4\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}+x+C;$

3) $\int\left(6^x+\frac{1}{x}\right)dx=\int 6^xdx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{6^x}{\ln 6}+\ln|x|+C$

4) $\int(4x^2-3x+2)dx=4\int x^2dx-3\int xdx+2\int dx=4\cdot\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+2x+C==\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2x+C$ (свойства 1,2 и формулы 1,2).

5) $\int 2\sqrt[4]{x^3}\,dx=2\int x^{\frac{3}{4}}\,dx=2\cdot\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}+C=2\cdot\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}+C=2\cdot\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+C=\frac{8}{7}\sqrt[4]{x^7}++C=\frac{8}{7}x\sqrt[4]{x^3}+C$

Проверочная работа

Задание 1: Вычислить неопределенный интеграл (найти первообразную)

1)$\int x^7dx=$

2) $\int x^{\frac{2}{5}}dx=$

3)$\int\frac{2dx}{\cos^2 x}=$

4) $\int\frac{1}{8^2+x^2}dx=$

5) $\int\sin 5xdx=$

6) $\int 7^x\,dx=$

Задание 2: Вычислить неопределенные интегралы.

1) $\boldsymbol{\int(x+\cos x)\,dx=}$

2) $\boldsymbol{\int(x^2-\sin x)\,dx=}$

3) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\cos^2 x}) dx =$

4) $\int (x^{\frac{3}{4}} + \frac{1}{\sin^2 x}) dx =$

5) $\int \left(e^x - \frac{1}{x}\right) dx =$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

Задание 3: Вычислить неопределенные интегралы, используя правила нахождения первообразных.

1) $\int (5x^7 - 4x^6 + 3x^3 - 2x + 3)\, dx =$

2) $\int (11x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 8)\, dx =$

3) $\int \left(4\sin x + 5\cos x - 3\sqrt{x} - 6x\right) dx =$

4) $\int \left(\frac{5}{x+1} - e^{5x-1}\right) dx =$

5) $\int \sqrt[3]{(7x-9)^2}\, dx =$

6) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx =$

Установи соответствие

$\int \cos x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\int 8^x$	$-ctg\, x$
$\int x^{2/3}$	$tg\, x$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$\frac{2}{3} x^{3/2}$
$\int \sqrt{x}$	$\frac{8^x}{\ln 8}$
$\int \frac{dx}{x}$	$\sin x$
	$-\sin x$
	$\frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}}$

2.3.2 Интегрирование методом подстановки

Если заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно привести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его нахождения применяют особые приёмы, одним из которых является способ подстановки.

Способ подстановки (замены переменной) заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить или разделить подынтегральное выражение).

Алгоритм нахождения неопределенного интеграла способом подстановки (методом замены переменной)

Пример 1 . Найти интеграл: $\int(3-4x)^4\,dx$.

1) ***Обозначим*** выражение $3-4x$ через t, т.е. записываем $3-4x=t$.

2) ***Продифференцируем*** (найдём производные) обе части этого выражения. $-4dx=dt$.

3) ***Выразим*** из этого выражения оставшуюся часть подынтегрального выражения: $dx=-\frac{1}{4}dt$.

4) ***Подставим*** в интеграл и проинтегрируем.

5) ***Сделать обратную подстановку***, т.е. вместо t подставить $3-4x$.

Записывается следующим образом:

$$\int(3-4x)^4\,dx=\left|\begin{matrix}3-4x=t\\-4dx=dt\\dx=-\frac{1}{4}dt\end{matrix}\right|=\int t^4\left(-\frac{1}{4}dt\right)=-\frac{1}{4}\int t^4\,dt=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{t^5}{5}+C\quad=-\frac{1}{20}t^5+C=-\frac{1}{20}(3-4x)^5+C$$

Пример 2. Найти интеграл: $\int cos^3 x \cdot \sin x dx$

$$\int cos^3 x \cdot \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \\ \sin x\, dx = -dt \end{matrix} \right| = \int t^3\,(-dt) = -\frac{t^4}{4} + \text{C} =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos x + C$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) dx$

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометрической функции*

$$\int \sin\left(\frac{1-2x}{3}\right) dx = \left| \begin{matrix} t = \dfrac{1-2x}{3} \\ dt = -\dfrac{2}{3}dx \\ dx = -\dfrac{3}{2}dt \end{matrix} \right| = \int \sin t \cdot \left(-\frac{3}{2}dt\right) = -\frac{3}{2}\int \sin t \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2}(-\cos t) + C = \frac{3}{2}\cos t + C = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{1-2x}{3}\right) + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int e^{1-\frac{1}{3}x} dx$

За новую переменную возьмем *показатель степени*

$t = 1 - \dfrac{1}{3}x$.

Тогда

$$\int e^{1-\frac{1}{3}x}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1 - \frac{1}{3}x \\ dt = -\frac{1}{3}dx \\ dx = -3dt \end{array} \right| = \int e^t(-3dt) = -3\int e^t dt = -3e^t + C = -3e^{1-\frac{1}{3}x} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{1}{(4-3x)^7}dx$.

За новую переменную возьмем *функцию, стоящую в основании степени* $t = 4 - 3x$. Тогда

$$\int \frac{1}{(4-3\mathrm{x})^7}dx = \left| \begin{array}{c} 4 - 3x = t \\ -3dx = dt \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int t^{-7}\left(-\frac{1}{3}dt\right) = -\frac{1}{3}\int t^{-7}dt =$$

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{-6}}{-6} +$$

$$+C = \frac{t^{-6}}{18} + C = \frac{1}{18t^6} + \mathrm{C} = \frac{1}{18(4-3x)^6} + C$$

Пример 6. Найти интеграл $\int x\sin(2-3x^2)dx$.

За новую переменную удобно взять *аргумент тригонометрической функции,* если к тому же под интегралом присутствует производная этого аргумента .

$$\int x\sin(2-3x^2)dx = \left| \begin{array}{l} t = 2 - 3x^2 \\ dt = -6xdx \\ xdx = -\frac{1}{6}dt \end{array} \right| = \int \sin t\left(-\frac{1}{6}dt\right) = -\frac{1}{6}\int \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{6}\cos t + C = \frac{1}{6}\cos(2-3x^2) + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Здесь за новую переменную удобно принять *показатель степени*, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этого показателя.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{x} \\ dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \\ \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = \int e^t\left(2dt\right) = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\, dx$.

За новую переменную удобно взять *подкоренное выражение*, так как под интегралом присутствует также его производная.

$$\int \sin 3x \sqrt[6]{3-4\cos 3x}\, dx = \left| \begin{array}{l} t=3-4\cos 3x \\ dt=-4\left(-\sin 3x\right)\cdot 3dx \\ \sin 3x\cdot dx=\dfrac{1}{12}dt \end{array} \right| = \int \sqrt[6]{t}\cdot\frac{1}{12}dt =$$

$$= \frac{1}{12}\int t^{\frac{1}{6}}\cdot dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^{7/6}}{7/6} + C = \frac{1}{14}\sqrt[6]{\left(3-4\cos 3x\right)^7} + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \dfrac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx$.

За новую переменную берем функцию, стоящую в *основании степени*, так как подынтегральное выражение содержит производную этой функции .

$$\int \frac{x^3}{\left(2+x^4\right)^2}dx = \left| \begin{aligned} & t = 2 + x^4 \\ & dt = 4x^3dx \\ & x^3dx = \frac{1}{4}dt \end{aligned} \right| = \int \frac{\frac{1}{4}dt}{t^2} = \frac{1}{4}\int t^{-2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{4t} + C = -\frac{1}{4(2+x^4)} + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3(2x-3)}{2x-3}\,dx$.

Здесь под интегралом содержится *логарифмическая функция,* удобно принять ее за новую переменную, учитывая, что под знаком интеграла присутствует производная этой функции .

$$\int \frac{\ln^3\left(2x-3\right)}{2x-3}dx = \left| \begin{aligned} & t = \ln(2x-3) \\ & dt = \frac{1}{2x-3}\cdot 2dx \\ & \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| == \int t^3\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int t^3dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{8}\ln^4\left(2x-3\right) + C.$$

Проверочная работа

Задание 1. Найти интегралы способом подстановки:

1. $\int (2x+5)^4 dx;$
2. $\int (7-2x)^3 dt;$
3. $\int (1+x^5)^3 x^4 dx;$
6. $\int \frac{x^2}{8+x^3};$
7. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-3}};$
8. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}};$
11. $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx;$
12. $\int \frac{x\cdot dx}{x+1};$
13. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

4. $\int \frac{dx}{(5-3x)^4}$;

5. $\int \sqrt{1+x^3} \cdot x^2 dx$;

9. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx$;

10. $\int 6^{5x+2} \cdot dx$;

14. $\int (3x^2 - 5) \cdot x\, dx$

15. $\int \frac{x\, dx}{5-x^2}$

Задание 2. Найти интегралы:

1. $\int sin^2 x \cdot \cos x dx$;
2. $\int e^{\cos x} \cdot \sin x dx$;
3. $\int x^2 \cdot \cos(4 - x^3)\, dx$;
4. $\int (1 - cos^2 x) \cdot \sin x\, dx$;
5. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x}$;
6. $\int 5^{1+\cos x} \cdot \sin x\, dx$;
7. $\int \frac{\cos x dx}{1+sin^2 x}$;
8. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;
9. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-\sin x}}$;
10. $\int \frac{\sin x dx}{(4+\cos x)^3}$.

3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

3.1 Формула Ньютона - Лейбница

Определение. Приращение $F(b) - F(a)$любой из первообразных $F(x) + \mathrm{C}$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется **определенным интегралом** и записывается

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где a — нижний предел интегрирования,
b — верхний предел интегррования.

Эта формула называется **формулой Ньютона-Лейбница**, и она даёт

правило вычисления определённого интеграла

Если функция f(x) непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$. Если $F(x)$-первообразная функции $f(x)$на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ **нужно:**

- найти соответствующий неопределенный интеграл;
- в полученное выражение вместо x подставить сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла;
- из первого результата подстановки вычесть второй, т.е. найти разность $\mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$.

3.2 Основные свойства определённого инте

1. Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла.

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

2. Определённый интеграл алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов этих функций с теми же пределами интегрирования.

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1\,(x)dx \pm \int_a^b f_2\,(x)dx$$

3. Если пределы интегрирования определённого интеграла поменять местами, то его знак изменится на противоположный.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Определённый интеграл от непрерывной на отрезке

3.3 Правила интегрирования

3.3.1 Метод непосредственного интегрирования в определенных интегралах

Примеры: Вычислить определенный интеграл, используя формулу

Ньютона-Лейбница

1) $\int_3^4 xdx$

Решение $\int_3^4 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_3^4 = \frac{1}{2}(4^2 - 3^2) = \frac{7}{2}$

2) $\int_{-1}^1 x^2dx$

Решение $\int_{-1}^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3}(1^3 - (-1)^3) = \frac{2}{3}$

3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx$

Решение $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -(0-0) = 0$

4) $\int_0^2 (x^2 + x^3)\,dx$

Решение $\int_0^2 (x^2 + x^3)\,dx = \int_0^2 x^2dx + \int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) + + \frac{1}{4}(2^4 - 0^4) = \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3}$

5) $\int_0^\pi (\cos x - 2x)dx$

Решение $\int_0^\pi (\cos x - 2\,x)dx = \int_0^\pi \cos x\,dx - 2\int_0^\pi x\,dx = \sin x\Big|_0^\pi - 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^\pi = (\sin\pi - \sin 0) - (\pi^2 - 0^2) = -1 - 1 - \pi^2 =$

$-2-\pi^2.$

6) $\boldsymbol{\int_1^2 (x^2 + x^3 - 10x^4 + 20x - 8)dx}$

Решение

$$\int_1^2 (x^2 + x^3 - 10x^4 + 20x - 8)dx$$
$$= \int_1^2 x^2 dx$$
$$+ \int_1^2 x2^3 dx$$
$$- 10\int_1^2 x^4 dx + 20\int_1^2 x dx - 8\int_1^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 + \frac{x^4}{4}\Big|_1^2$$
$$- 10\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 20\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{3}(2^3 - 1^3) + \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) - \frac{10}{5}(2^5 - 1^5)$$
$$+ \frac{20}{2}(2^2 - 1^2) - 8(2-1) = \frac{7}{3} + \frac{16}{4} - 62 + 30 - 8$$
$$= -\frac{101}{3}$$

7) $\mathbf{\int_1^3 (2x^3 + 5x^2 - 3)dx}$

Решение $\int_1^3 (2x^3 + 5x^2 - 3)dx = 2\int_1^3 x^3\, dx + 5\int_1^3 x^2 dx - 3\int_1^3 dx =$

$$= \left(2 \cdot \frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3x\right)\Big|_1^3 = (\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 3x)\Big|_1^3 =$$
$$= \frac{1}{2}(3^4 - 1^4) + \frac{5}{3}(3^3 - 1^3) - 3(3-1) = \frac{1}{2}\cdot 80 + \frac{5}{3}\cdot 26 - 3\cdot 2$$
$$= 83\frac{1}{3}$$

8) $\int_0^2 (x^2 - 3x + 5)\,dx - \int_0^2 (x^2 - 5x + 4)\,dx$

Решение

$$\int_0^2 (x^2 - 3x + 5)\,dx - \int_0^2 (x^2 - 5x + 4)\,dx$$
$$= \int_0^2 (x^2 - 3x + 5 - x^2 + 5x - 4)dx = \int_0^2 (2x + 1)\,dx$$
$$= 2\int_0^2 xdx + \int_0^2 dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + x\Big|_0^2 = (2^2 - 0^2)$$
$$+ (2 - 0) = 6$$

Проверочная работа:

Задание 1. Вычислить определенные интегралы:

1) $\int_2^3 xdx =$

2) $\int_{-2}^4 xdx =$

3) $\int_{-2}^1 x^2dx =$

4) $\int_3^4 x^2dx =$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx =$

6) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xdx =$

7) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos xdx =$

8) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx =$

Задание 2: Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница и применяя свойства:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x + 3\sin x)dx =$

2) $\int_{-2}^{2}(x + x^3 + 8x^4 + 20)dx =$

3) $\int_{-1}^{0}(x^2 - 4x + 1)\,dx - \int_{-1}^{0}(2x^2 - 5x + 3)\,dx =$

4) $\int_0^3(x^3 - x^2 - 3x + 4)\,dx + \int_0^3(x^2 - 8x - 4)\,dx =$

5) $\int_0^3(2x^3 - x^2 - 3x + 4)\,dx - \int_0^3(x^3 - x^2 - 8x + 4)\,dx =$

6) $\int_{-2}^{1}(-x + 8)dx =$

7) $\int_0^{\pi}(x + \sin x)dx =$

3.3.2 Вычисление определенного интеграла методом подстановки

При вычислении определённого интеграла так же приходится применять различные приёмы, в том числе и способ подстановки. Подстановка в определённом интеграле делается аналогично подстановке в неопределённом интеграле, но, кроме того, для получающегося интеграла нужно находить новые пределы интегрирования.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом подстановки

1. Определить, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл;
2. Определить, какую часть подынтегральной функции необходимо заменить новой переменной, записать эту замену;
3. Вычислить дифференциал новой переменной и выразить через него оставшуюся без замены

Замечание: В отличие от неопределенного интеграла после подстановки новой переменной и замены пределов интегрировании в определённом интеграле все вычисления проводят с новой переменной и к старой переменной не возвращаются.

Вычислить интегралы методом подстановки.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^2 (2x-3)^5 dx$

$$\int_1^2 (2x-3)^5 dx = \left| \begin{array}{c} 2x-3=t \\ 2dx=dt \\ dx=\frac{1}{2}dt \\ t_{\text{н}} = 2\cdot 1 - 3 = -1 \\ t_{\text{в}} = 2\cdot 2 - 3 = 1 \end{array} \right| = \int_{-1}^1 t^5 \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 t^5\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{t^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = \frac{t^6}{12}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1^6}{12} - \frac{(-1)^6}{12} = \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_2^3 \frac{1}{(3x+1)^4}\, dx$

$$\int_2^3 \frac{1}{(3x+1)^4}\, dx = \left| \begin{array}{c} 3x+1=t \\ 3dx=dt \\ dx=\frac{1}{3}dt \\ t_{\text{н}} = 3\cdot 2 + 1 = 6 \\ t_{\text{в}} = 3\cdot 3 + 1 = 10 \end{array} \right| = \int_6^{10} \frac{1}{t^4} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_6^{10} t^{-4}\, dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{-3}}{-3} \Big|_{6}^{10} = -\frac{1}{9t^3} \Big|_{6}^{10} = -\frac{1}{9 \cdot 10^3} - \left(-\frac{1}{9 \cdot 6^3}\right)$$

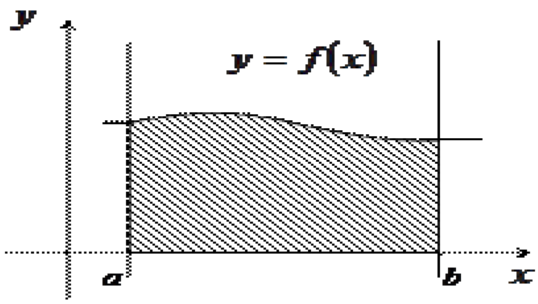
$$= -\frac{1}{9000} + \frac{1}{1944} =$$

$$= \frac{-1944 + 9000}{17496000} = \frac{7056}{17496000} = \frac{441}{1093500} = \frac{49}{121500}$$

3.4 Геометрический смысл определенного интеграла

Криволинейной трапецией называют фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, b]$функции *f*, *OX* и прямыми *x*=*a* и *x* =*b*.

Теорема. Пусть *f* -непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, а *S* - площадь соответствующей криволинейной трапеции . Тогда, если *F* есть первообразная для *f* на интервале , содержащем отрезок, то S=F(b)-F(*a*).



Криволинейная трапеция

Формулу для вычисления **площади криволинейной трапеции** с помощью интеграла можно записать таким образом:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Формула верна для любой функции *f* , непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Вычисление площадей плоских фигур

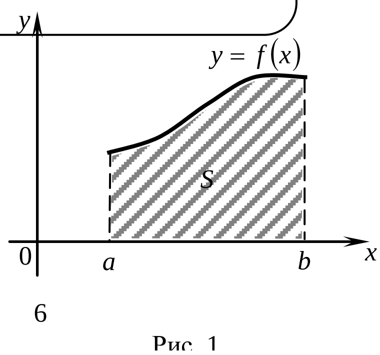


Рис. 1

1) Если функция $y = f(x) \geq 0$ и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то согласно геометрического смысла определенного интеграла площадь S под кривой $[a;b]$ численно равна определенному интегралу

$$S = \int_a^b f(x)dx, \; f(x) \geq 0. \quad (1)$$

2) Если функция $y = f(x) \leq 0$ и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то отображая ее график относительно оси абсцисс, получим кривую, которая имеет уравнение $y = -f(x)$. Последняя функция уже неотрицательна на $[a;b]$, а площадь под этой кривой на $[a;b]$, из условия симметрии графиков, равна искомой площади S под кривой $y = f(x)$ на $[a;b]$. Тогда имеем

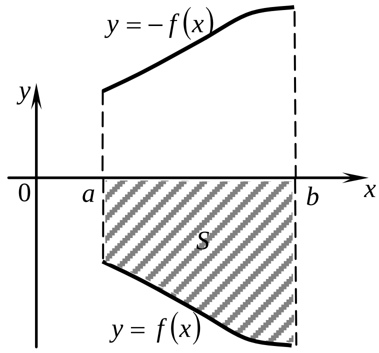
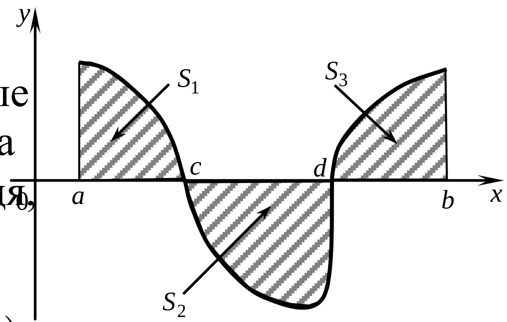


Рис..2

$$S = -\int_a^b f(x)dx, \; f(x) \leq 0. \quad (2)$$

3) Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна и принимает как положительные так и отрицательные значения, например, на $[a;c]$ и $[d;b]$ $f(x) \geq 0$, а на $[c;d]$ $f(x) \leq 0$, то глядя, на рассмотренные случаи 1) и 2), имеем



$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx. \quad (3)$$

Рис. 3

4) Если на отрезке $[a;b]$ заданы две непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ такие, что $f_2(x) \geq f_1(x)$, тогда площадь S фигуры, ограниченной этими кривыми на отрезке $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \quad (4)$$

Возможны несколько случав размещения кривых на отрезке $[a;b]$. Для всех изображенных случаев размещения кривых $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ имеет место формула $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$

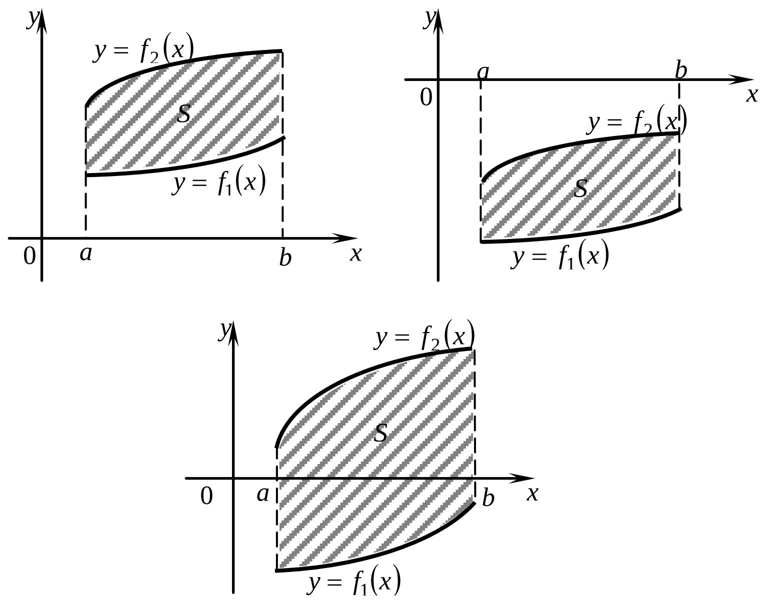


Рис..4

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1 Приложения интегралов в геометрии

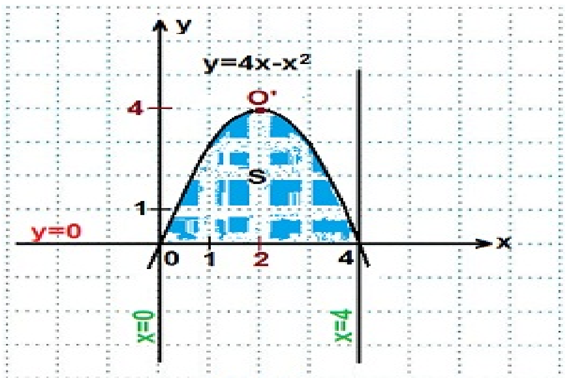
4.1.1 Задачи на вычисление площадей плоских фигур

Задачи на вычисление площадей плоских фигур решают по следующему плану:

1. **Делают схематический чертёж по условию задачи.**
2. **Составляют формулу для вычисления площади полученной фигуры и находят пределы интегрирования из условия задачи.**
3. **Вычисляют площадь фигуры по составленной формуле.**

Задание 1: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2, y = 0, x = 0, x = 4$

Решение



(рис.1)

Строим графики данных линий. (рис. 1).

1) $y=4x-x^2$ — парабола (вида $y=ax^2+bx+c$).

Запишем данное уравнение в общем виде: $y=-x^2+4x$. Ветви этой параболы направлены вниз, так как первый коэффициент $a=-1<0$.

Вершина параболы находится в точке $O'(m; n)$, где

$$\mathbf{m} = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-1)} = 2; \quad \mathbf{n = y(m)} = 4\cdot 2 - 2^2 = 4.$$

Значит $O'(2$; 4 вершина параболы.).

Нули функции (точки пересечения графика с осью Ox) найдем из уравнения:

$$4x-x^2=0.$$

$$x(4-x)=0.$$

Отсюда, $x=0$ или $x=4$.

Абсциссы точек найдены, ордината равна нулю — искомые точки: (0; 0) и (4; 0).

2) $y=0$ — это ось Ox;

3) $x=0$ — это ось Oy;

4) $x=4$ — прямая, параллельная оси Oy и отстоящая от нее на 4 единичных отрезка вправо.

Площадь построенной криволинейной трапеции находим по формуле Ньютона-Лейбница.
У нас
f (x)=4x-x²,a=0, b=4.
Следовательно, искомая площадь равна

$$S=\int_0^4 (4x-x^2)dx = \left(4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = \left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4 = 2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}=$$

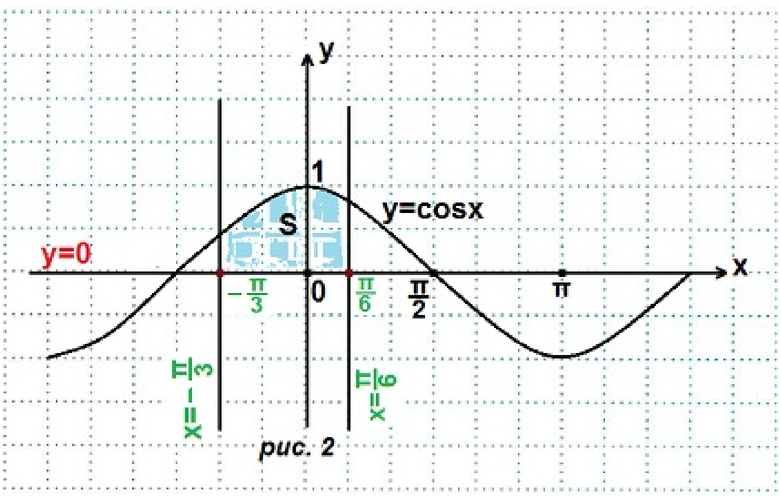
$$=32-\frac{64}{3}=32-21\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S=10\frac{2}{3}$ (кв. ед.)

Задание 2: Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной

линиями: y= cosx, y= 0, $x=-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{6}$

Решение.
Строим графики данных линий. (рис. 2).



Площадь данной криволинейной трапеции:

$$S=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=$$

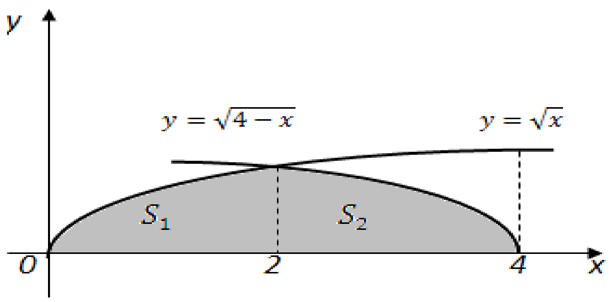
$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ (кв. ед.)

Задание 3: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-x}$, $y=0$

Решение:



Вычислим абсциссы точек пересечения графиков этих функции ,для этого решим уравнение:

$\sqrt{x}=\sqrt{4-x}$, $x=4-x$, $2x=4$, $x=2$.

$S=S_1+S_2$

$S_1=F_1(2)-F_1(0)$, $F_1(x)=\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{x}$, $S_1=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}-0=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,

$S_2=F_2(4)-F_2(2)$, $F_2(x)=-\frac{(4-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\sqrt{(4-x)^3}=-\frac{2}{3}(4-x)\sqrt{4-x}$

$S_2=\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{2}$..

$S=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (кв.ед).

Ответ: $\frac{8\sqrt{2}}{3}$(кв.ед).

Задание 4: Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$y = x^2 - 4x + 4$ и касательными к этому графику, проходящими через начало координат.

Решение.

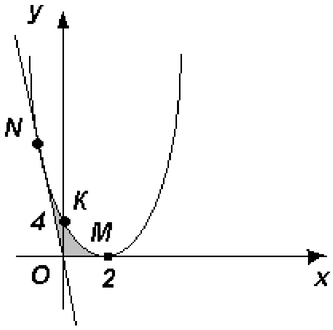
Уравнение касательной к графику $y = x^2 - 4x + 4$ проходящей через его точку $M(t;\, t^2 - 4t + 4)$. Так как $y' = 2x - 4$, то уравнение касательной имеет вид $y = (2t-4)(x-t) + t^2 - 4t + 4$, или

$$y = (2t-4)x - t^2 + 4.$$

По условию, начало координат принадлежит касательной, поэтому $0 = (2t-4)\cdot 0 - t^2 + 4$, откуда $t_1 = 2$, $t_2 = -2$.

Значение $t_1 = 2$ соответствует касательной $y = 0$, точка касания $M(2\,;\,0)$. Значение $t_2 = -2$ соответствует касательной $y = -8x$,

точка касания $N(-2\,;16)$. Площадь искомой фигуры равна сумме площадей криволинейных треугольников OMK и ONK



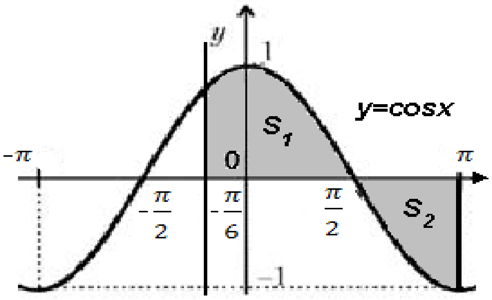
$$S_{OMK} = \int_{-2}^{0} \left((x^2 - 4x + 4) - (-8x)\right) dx \int_{-2}^{0} (x+2)^2\, dx = \left.\frac{(x+2)^3}{3}\right|_{-2}^{0} = \frac{8}{3},$$

$$S_{ONK} \int_{0}^{2} (x-2)^2\, dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_{0}^{2} = \frac{8}{3},$$

Искомая площадь равна $\frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ (кв. ед.)

Задание 5: Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции

$y = \cos x$, осью OX и прямыми $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \pi$



Решение.

Данная функция состоит из двух криволинейных трапеций, расположенных в разных полуплоскостях относительно оси OX.

Таким образом $S = S_1 + S_2$;

$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx\right| = \sin x\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$(\sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\frac{\pi}{6})) - (\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{1}{2} + 1 = 2{,}5 \text{ (кв.ед.)}$$

Задание 6: Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и

$$y = \sqrt{x}$$

Решение.

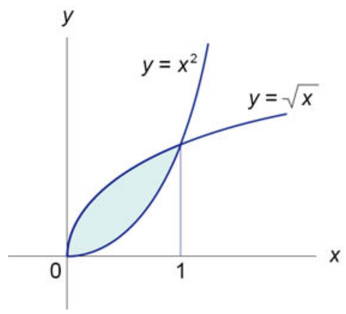


Рис.3

Сначала определим точки пересечения двух кривых (рис. 3).

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x}\left(x^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2=0$$

Таким образом, данные кривые пересекаются в точках (0,0) и (1,1). Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{x^3} - x^3\right) = \frac{1}{3}$$

Проверочная работа:

Задание 1: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2$$

Задание 2: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \cos x\,, y = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$$

Задание 3: Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \cos x\,, y = 0, x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{6}$$

Задание 4: Найти площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и параболой

$$y = 4 - x^2$$

Задание 5: Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = 2x - x^2 \text{ и } x + y = 0$$

4.1.2. Задачи на вычисление объема тела вращения

Важнейшим приложением темы является вычисление **объема тела вращения.**

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$\mathbf{V = \pi \int_a^b y^2\, dx}$$

Задача . Вычислить объем тела, полученного при вращении вокруг

оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2x + 1, y = x + 4, x = 0 \text{ и } x = 1$$

Решение:

Изобразим на чертеже плоскую фигуру, ограниченную линиями

$y = 2x + 1, y = x + 4, x = 0$ и $x = 1,$ не забывая при этом, что уравнение

$x = 0$ задает ось OY:

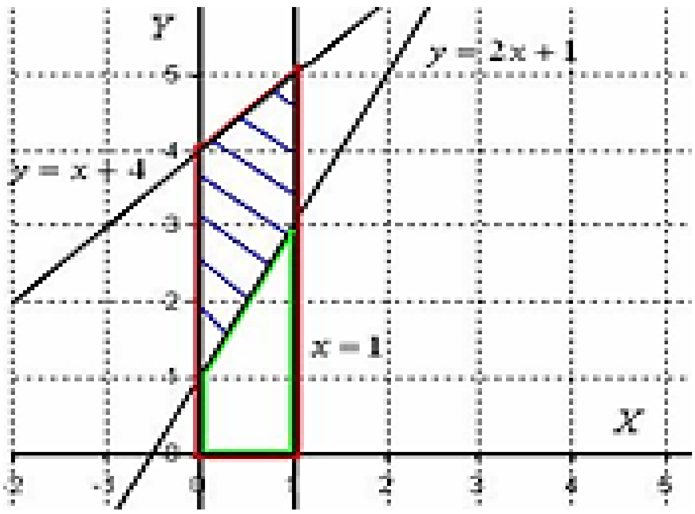


Рис. 1

Искомая фигура заштрихована, синим цветом. При её вращении вокруг оси OX получается такой сюрреалистический бублик с четырьмя углами.

Объем тела вращения вычислим как ***разность объемов тел***.

Сначала рассмотрим фигуру, которая обведена красным цветом. При её вращении вокруг оси OX получается усеченный конус. Обозначим объем этого усеченного конуса через V_1.

Рассмотрим фигуру, которая обведена зеленым цветом. Если вращать данную фигуру вокруг оси OX, то получится тоже усеченный конус, только чуть поменьше. Обозначим его объем через V_2.

Разность объемов $V = V_1 - V_2$ это и есть объем нашего «бублика». Используем стандартную формулу для нахождения объема тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx$$

1) Фигура, обведенная красным цветом ограничена сверху прямой

$y = x + 4$, поэтому:

$$V_1 = \pi \int_0^1 (x+4)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 + 8x + 16) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4x^2 + 16x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} + 4 + 16 \right) = \frac{61\pi}{3}$$

2) Фигура, обведенная зеленым цветом ограничена сверху прямой

$y = 2x + 1$,поэтому:

$$V_2 = \pi \int_0^1 (2x+1)^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (4x^2 + 4x + 1) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} + 2x^2 + x \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} + 2 + 1 \right) = \frac{13\pi}{3}$$

3) Объем искомого тела вращения:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{61\pi}{3} - \frac{13\pi}{3} = 16\pi.$$

Ответ: $V = 16\pi$ ед^3 $\approx 50{,}3$ ед^3

Проверочная работа:

Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad y = 0;$
2. $y = x^2 - 4, \quad y = 0;$
3. $y^2 = 4x, \quad y = x;$
4. $y = 2x - x^2$ и $y = 0;$
5. $y = x^2 + 1$ и $y = 2;$
6. $y^2 = 2x$ и $2x + 2y - 3 = 0.$

4.2 Приложения интегралов в физике

Применение интеграла к решению прикладных задач

При решении физических задач, изучаемый процесс разбивают на элементарные части, в пределах каждой из которых изменением соответствующих величин можно пренебречь. Теперь задача решается по формулам для постоянных величин, после чего окончательный ответ находится с помощью интегрирования.

4.2.1. Задачи на движение

Вычисление пути, пройденного телом

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле $S = vt$.
Если тело движется не равномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т.е.

$v = f(t)$,

то для нахождения пути, пройденного телом за время от t_1 до t_2 воспользуемся формулой

$$\mathbf{s} = \int_{\mathbf{t_1}}^{\mathbf{t_2}} \mathbf{v(t)dt},$$

где t_1 – время начала движения,
t_2 – время окончания движения.

Задача 1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$(м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение: Начало движения тела происходит в момент времени $t_1 = 0$. Так как тело движется 5 секунд, то $t_2 = 5$

$S = \int_0^5 (3t + 3t^2)dt = (t^2 + t^3)|_0^5 = 150$(м)

Ответ: 150 м

Задача 2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью
$v_1 = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2 = (4t + 5)$ м/с.
На каком расстояния друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение:

Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

Начало движения тела происходит в момент времени $t_1 = 0$. Так как тело движется 5 секунд, то $t_2 = 5$

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = (2t^3 + t^2)|_0^5 = 275 \text{ (м)}$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = (2t^{32} + 5t)|_0^5 = 75 \text{ (м)}$$

Таким образом, $S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200$ (м).

Ответ: 200 м

Проверочная работа:

1. Скорость движения материальной точки задаётся формулой $v(t) = (4t^3 - 2t + 1)\ ^{м}/_{с}$. Найти путь, пройденный точкой за первые четыре секунды движения.

2. Скорость движения изменяется по закону $v(t) = 2t\ ^{м}/_{с}$. Найти путь, пройденный телом за третью секунду движения.

3. Скорость движения тела задана уравнением $v(t) = (12t - 3t^2)\ ^{м}/_{с}$. Определить путь, пройденным телом от начала движения до остановки.

4. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v(t) = (29{,}4 - 9{,}8\,t)\ ^{м}/_{с}$. Найдите наибольшую высоту подъёма тела.

5. Два тела выходят одновременно из одной точки: одно со скоростью $v(t) = 5t\ ^{м}/_{с}$, другое – со скоростью $v(t) = 3t^2\ ^{м}/_{с}$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 секунд после начала движения, если движутся по прямой в одном направлении?

6. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из одной точки в одном направлении со скоростями $v(t) = 4t\ ^{м}/_{с}$ и $v(t) = (6t^2 + 4t)\ ^{м}/_{с}$.
Через сколько секунд после начала движения расстояние между нами будет равно 250 м?

4.2.2. Задача на вычисление работы, затраченной на растяжение пружины

Вычисление работы, затраченной на растяжение пружины

Согласно закону Гука, сила F необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.
Пусть x - величина растяжения или сжатия пружины.
Тогда $\boldsymbol{F = kx}$,
где k- коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств пружины.
Для нахождения величины работы воспользуемся формулой:

$$\boldsymbol{A = k\int_{x_0}^{x_1} x\,dx}.$$

**Задача 1.** Сила упругости F пружины, растянутой на l_1 = 0,05 м, равна 3Н. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на l_2 =0,1 м?

Решение:

Подставив данные в формулу закона Гука, получим: $3 = k \cdot 0.05$, т.е. $k = 60$, следовательно, сила упругости выражается соотношением $F = 60x$.
Найдем работу переменной силы, полагая, что, $a = 0$; $b = 0{,}1$:

$$A = \int_0^{0,1} 60x dx = 30x^2|_0^{0,1} = 0,3 \text{ Дж}.$$

Ответ: 0,3 Дж

Проверочная работа:

1. Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 0,02 м?

2. Сила в 60 Н достаточна для растяжения пружины на 2 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть эту пружину до длины 20 см, если первоначальная длина её равна 14 см.

3. Растягивая пружину на 0,04 м, произвели работу 100Дж. Какая работа будет затрачена при растяжении пружины на 0,1 м?

4. Для сжатия пружины на 0,03 м необходимо совершить работу 16Дж. На сколько сантиметров можно сжать эту пружину, совершив работу 144Дж?

5. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 100 Н растягивает её на 2,5 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от длины в 25 см до 35 см?

4.2.3. Задача на вычисление работы переменной силы

Вычисление работы переменной силы

Пусть материальная точка под действием силы F движется по прямой. Если действующая сила постоянная, а пройденный путь равен s, то как известно из курса физики, работаAэтой F вычисляется по формуле:$A = F \cdot s$.

Работу переменной силы $f(x)$ при перемещении по оси ОXматериальной точки от $x = a$ до $x = b$, находим по формуле:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Задача 1. Найдем работу, выполняемую при переносе материальной точки, имеющей массу m, из $A(a)$ в $B(b)$, если притягивающая ее по закону Ньютона, точка имеет массу μ и находится в начале координат.

рисунок 3

Решение:

По закону Ньютона сила тяготения равна $G\frac{\mu m}{r^2}$, где G — гравитационная постоянная, а r — расстояние между точками. По формуле

$A = \int_a^b f(x)dx$ получаем: $A = G\mu m \int_a^b \frac{dx}{x^2} = G\mu m\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$.

Задача 2. Найдем работу переменного тока, изменяющегося по формуле $I = I_0 sin\omega t$ за промежуток времени$[0; \frac{2\pi}{\omega}]$, если сопротивление цепи равно R.

Решение:

Как известно из физики, в случае постоянного тока мощность выражается формулой $W = I^2R$. Поэтому по формуле $A = \int_a^b f(x)dx$ имеем:

$$A = I^2R\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} sin^2\omega t dt = \frac{I_0^2 R\pi}{\omega}.$$

5. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое интегрирование?
2. Что называется первообразной функцией для данной функции?
   Какое при этом должно выполняться условие? Приведите примеры.
3. Сколько первообразных соответствует одному дифференциалу?
   Почему?
4. Что называется неопределённым интегралом?
5. Сформулируйте и запишите свойства неопределённого интеграла, которые следуют из его определения.
6. Какие свойства необходимы для нахождения неопределённого интеграла?
7. Какие вы знаете способы нахождения неопределённого интеграла?
8. Что называется определённым интегралом?
9. Правило вычисления определённого интеграла.
10. Сформулируйте и запишите свойства определённого интеграла?
11. В чём заключается геометрический смысл определённого интеграла?
12. Какие геометрические задачи решаются с помощью интеграла?
13. Какие физические задачи решаются с помощью интеграла?

ВЫВОДЫ

В данном методическом пособии рассматривается вопрос об организации самостоятельной работы студентов по теме: «Интеграл и его применение», как форме учебной деятельности.

Актуальность темы не вызывает сомнений, поскольку в условиях роста значимости самостоятельной работы студентов, деятельность преподавателя и студента наполняется новым содержанием. Работа с данным пособием развивает умение извлекать информацию из различных источников, умение анализировать и сравнивать.

Методическое пособие предназначено для использования студентами на аудиторных и внеаудиторных занятиях по математике. Составлено в соответствии с требованиями ГОС СПО. В методическом пособии дан необходимый теоретический материал и образцы решения задач и упражнений по основным темам курса математики для СПО «Интеграл и его применение». Образцы решения типичных задач приводятся подробно, с комментариями. Рассмотрено решение задач разного уровня сложности. Для самостоятельного решения даны задачи разного уровня сложности.

Методическое пособие создано для оказания помощи студентам в достижении образовательного стандарта при освоении основной профессиональной программы СПО при выполнении практических работ, при подготовке к зачету, а также для ликвидации пробелов в знаниях по математике.

Развитие самостоятельной деятельности является одним из важнейших путей формирования компетентной, востребованной на рынке труда личности. Эти качества формируются только при условии систематического включения обучения в самостоятельную деятельность, которая в процессе выполнения приобретает характер проблемно-поисковой деятельности.

Чем раньше студенты овладеют методами работы с учебной литературой, тем быстрее они начнут ориентироваться в большом количестве новой информации, тем быстрее проявятся их самостоятельность, активность и инициативность - такие важные профессиональные качества личности формируются в процессе самостоятельной работы.

Самостоятельная работа студентов – это планируемая работа, выполняемая по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Роль преподавателя заключается в организации самостоятельной работы с целью приобретения студентом общих и профессиональных компетенций, позволяющих сформировать у студента способности к саморазвитию, самообразованию и инновационной деятельности.

Роль студента заключается в том, чтобы в процессе самостоятельной работы под руководством преподавателя стать творческой личностью, способной самостоятельно приобретать знания, умения и навыки, формулировать проблему и находить оптимальный путь её решения.

Наиболее актуальными в настоящее время становятся требования к личным качествам студента –умению самостоятельно пополнять и обновлять знания, вести поиск необходимых учебных материалов; повышается роль самостоятельной работы студентов над учебным материалом, усиливается ответственность преподавателя за развитие навыков самостоятельной работы, за стимулирование профессионального роста студентов, воспитание их творческой активности и инициативы.

Современный студент, будущий специалист, должен не только овладеть определенной суммой знаний, но и научиться самостоятельно приобретать знания, работать с информацией.

В связи с этим самостоятельная работа студентов является важной и неотъемлемой частью учебного процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основные источники:

1. Алгебра и начала мат. анализа. 10кл. Учебник. Никольский С.М. и др 9-е изд. - М.: Просвещение, 2014. - 430 с.
2. Алгебра и начала мат. анализа. 11кл. Учебник. Никольский С.М. и др 9-е изд. - М.: Просвещение, 2014. - 430 с.

3. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницин и др. – М.: Просвещение, 2010.
4. Богомолов Н.В. Математика: учебник для ссузов / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. – 7-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010.
5. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учебное пособие для ссузов / Н. В. Богомолов.- 5-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2009.
6. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике: учебное пособие для средних профессиональных учебных заведений / Н.В. Богомолов. – 10-е изд. – М.: Высшая школа, 2008.

Дополнительные источники:

1. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 10 класс / А.Н. Рурукин. – М.: ВАКО, 2011.
2. Рурукин А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа: 11 класс / А.Н.Рурукин, Е.В. Бровкова, Г.В. Лупенко и др. – М.: ВАКО, 2011.
3. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразовательныхучреждений. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2005.
4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: В двух частях. Ч. 2: Задачник для общеобразовательных учреждений. – 6-е изд. – М.: Мнемозина, 2005.

Интернет-ресурсы:

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. Коллекция видеоуроков по предметам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://interneturok.ru/
3. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru/